المحاضرة السادسة

تابع الظل:

يُعطى تعريفاً بالشكل:

$$tan\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z}$$

وهو تابع:

- تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
- فردي.
- دوري دوره π.

تابع التظل:

يُعطى تعريفاً بالشكل:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

وهو تابع:

- تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
- فردي.
- دوري دوره π.

ملاحظة:

- إنّ حاصل قسمة (جداء) تابعين أحدهما فردي والآخر زوجي هو تابع فردي.
- إنّ حاصل قسمة (جداء) تابعين فرديين معاً أو زوجيين معاً هو تابع زوجي.

إثبات أنّ tan هو تابع دوري دوره π:

$$tan\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}$$

$$tan(z + \pi) = \frac{e^{2i(z+\pi)} - 1}{i(e^{2i(z+\pi)} + 1)} = \frac{e^{2iz+2i\pi} - 1}{i(e^{2iz+2\pi i} + 1)} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} = tan\, z$$

إثبات أنّ cot هو تابع دوري دوره π:

$$cot\, z = \frac{cos\, z}{sin\, z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{i(e^{2iz} + 1)}{e^{2iz} - 1}$$

$$cot(z+\pi)=\frac{i(e^{2i(z+\pi)}+1)}{e^{2i(z+\pi)}-1}=\frac{i(e^{2iz+2\pi i}+1)}{e^{2iz+2i\pi}-1}=\frac{i\left(e^{2iz}+1\right)}{e^{2iz}-1}=cot\, z$$

تمرين: أوجد الجزأين الحقيقي والتخيلي لـ $cot\, z\,, tan\, z$.

الحل: لدينا

$$tan\, z=\frac{sin\, z}{cos\, z}=\frac{\sin x\,.ch\ y+i\cos x\,.sh\ y}{\cos x\,.ch\ y-i\sin x\,.shy}$$

بالضرب بمرافق المقام:

$$=\frac{(\sin x\,.ch\ y+i\cos x\,.sh\ y).(\cos x\,.ch\ y+i\sin x\,.shy)}{(\cos x\,.ch\ y-i\sin x\,.shy).(\cos x\,.ch\ y+i\sin x\,.shy)}$$

$$=\frac{(\sin x\,.ch\, y)(\cos x\,.ch\, y)+(\sin x\,.ch\ y)(i\sin x\,.shy)+(i\cos x\,.sh\ y)(\cos x\,.ch\ y)-(\cos x\,.sh\ y)(\sin x\,.shy)}{(\cos x\,.ch\ y)^2+(\sin x\,.shy)^2}$$

ومنه فإنّ الجزء الحقيقي والتخيلي يعطيان بالمساواتين:

$$u=\frac{(\sin x\,.ch\ y)(\cos x\,.ch\ y)-(\cos x\,.sh\ y)(\sin x\,.shy)}{(\cos x\,.ch\ y)^2(\sin x\,.shy)^2}$$

$$v=\frac{(\sin x\,.ch\ y)(\sin x\,.shy)+(\cos x\,.sh\ y)(\cos x\,.ch\ y)}{(\cos x\,.ch\ y)^2(\sin x\,.shy)^2}$$

باتباع نفس الخطوات، نوجد الجزأين الحقيقي والتخيلي لـ $\cot z$.

تمرين: حل المعادلة $\tan z=i$.

الحل:

$$\tan z=i\Leftrightarrow\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=i\Leftrightarrow e^{2iz}-1=-\left(e^{2iz}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2iz}=0$$

ومنه فإنّ المعادلة مستحيلة الحل وذلك لأجل أي z من $\mathbb{C}$.

تمرين: حل المعادلة $\tan z=2i$.

الحل:

$$\tan z=2i\Leftrightarrow\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=2i\Leftrightarrow e^{2iz}-1=-\left(2e^{2iz}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow e^{-2y+2ix}=\frac{1}{3}e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2y} = \frac{1}{3} \quad , \quad 2x = \pi + 2\pi k \,:\, k \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي فإنّ حلول المعادلة تُعطى بالمساواة:

$$z_k = x + iy = \frac{\pi}{2} + \pi k + i\frac{1}{2}\ln 3$$

ملاحظة:

لإيجاد حل معادلة تحوي $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$, $\cot z$، نحولها إلى معادلة أسية ومن ثمّ نحل المعادلة الأسية كما تعلمنا.

...انتهت المحاضرة السادسة...